определяется рядами (9)*; если* $\Delta(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, ..., k_m \leqslant k_0$*, то задача* (2) – (6) *разрешима тогда, когда выполняются условия ортогональности*

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) \sin \pi l x \, dx = \int\limits_0^1 \psi(x) \sin \pi l x \, dx = 0, \quad l = k_1, ..., k_m.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 4(546). – С. 55–62.

2. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 1. – С. 1–8.

Л. У. Султанов, Р. Л. Давыдов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ruslan.davydov@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МКЭ

Настоящая работа посвящена разработке и численной реализации методики исследования напряженно-деформированного состояния упругопластических тел с учетом больших деформаций. Используется процедура пошагового нагружения с итерационным уточнением деформированного состояния. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов (МКЭ).

1. Постановка задачи. В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются левый тензор Коши-Грина (B), тензор пространственного градиента скорости (h), тензор деформации скорости (d). Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений (Σ) , определенного в актуальном состоянии. Вводится удельная потенциальная энергия деформации, которая зависит от левого тензора Коши-Грина $W = W(B)$, тогда тензор напряжений Коши-Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma) = \frac{2}{J}(B) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B}\right). \qquad (1)$$

Здесь J – относительное изменение объема.

2. Алгоритм расчета. Для соотношения (1), получено физическое соотношение в упругой области в виде зависимости производной Трусделла тензора напряжений от деформации скорости:

$$\left(\Sigma^{Tr}\right) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d^e).$$

Для решения нелинейной задачи используется инкрементальный метод. В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей

$$\int\limits_{\Omega} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) d\Omega = \int\limits_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int\limits_{S^\sigma} \vec{p} \cdot \delta \vec{v} dS.$$

В рамках теории течения используются аддитивное представление для полной деформации скорости, т. е. $(d) = (d^e) + (d^p)$. Предполагается справедливость ассоциированного закона течения: $(d^p) = \lambda' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}\right)$, где λ' – скорость пластических деформаций. Используется метод проецирования напряжений на поверхность текучести. Перейдя в определяющих соотношениях и линеаризованном уравнении к приращениям, составляем разрешающую систему линейных уравнений. Численная реализация основана на методе конечных элементов.

3. Численный пример. В качестве примера рассмотрено следующее выражение потенциала упругих деформаций:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8} (I_{1B} - 3)^2 + \mu \left(I_{1B} - 3\right) - \frac{\mu}{2} \left(I_{2B} - 3\right).$$

В качестве критерия упругого деформирования использовано условие Губера-Мизеса с упрочнением. Указанным методом численно решены задача растяжения круглого стержня с образованием шейки и задача о деформировании конической оболочки.

Таким образом, в работе построена методика численного исследования упруго-пластических тел, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов А. И., Султанов Л. У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред.* – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 465 с.

2. Bonet J., Wood R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.* – 1997. – 283 p.

3. Schroder J., Gruttmann F. *A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalizedstress-strain measures.* – 2002. – P. 38–64.